

被約なスキームの圏からのスキームの圏論的復元について

ゆじ ともき

October 21, 2021

今日のお話

S : スキーム

\diamond/S : いくつかの S -スキームの性質からなる集合

$\text{Sch}_{\diamond/S}$: \diamond/S を満たす S -スキームのなす $\text{Sch}_{/S}$ の full sub

今日は圏 $\text{Sch}_{\diamond/S}$ からスキーム S を復元する手順をお話します。

S : スキーム

\diamond/S : S -スキームの性質の集合

$\text{Sch}_{\diamond/S}$: \diamond/S を満たす S -スキームのなす Sch/S の full sub

\times, \lim : Sch でのファイバー積、極限

$\times^{\diamond}, \lim^{\diamond}$: $\text{Sch}_{\diamond/S}$ でのファイバー積、極限

今日は \diamond は以下のような部分集合であるとします。

$$\diamond \subset \{\text{red}, \text{qcpt}, \text{qsep}, \text{sep}\}.$$

- 望月先生 (2004,2012) : $\diamond/S = \text{f.t.}/S$, S : 局所ネーター
(+ log スキーム版)
- van Dobben de Bruyn さん (2019) : $\diamond = \emptyset$, S : 任意
- 遠アーベル幾何では... : $\diamond/S = \text{fét}/S$

主定理

Main Theorem

$\blacklozenge, \diamond \subset \{\text{red}, \text{qcpt}, \text{qsep}, \text{sep}\}$.

(1) S が局所ネーター正規なら、以下が圏 $\text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ の圏としての構造のみから構成できる:

(a) 各対象 $X \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ に対する、スキーム $\text{RSp}_{\blacklozenge/S}(X)$ と同型射 $\eta_X : X \xrightarrow{\sim} \text{RSp}_{\blacklozenge/S}(X)$.

(b) 各射 $[f : X \rightarrow Y] \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ に対する、スキームの射 $\text{RSp}_{\blacklozenge/S}(f) : \text{RSp}_{\blacklozenge/S}(X) \rightarrow \text{RSp}_{\blacklozenge/S}(Y)$ であって $\eta_Y \circ f = \text{RSp}_{\blacklozenge/S}(f) \circ \eta_X$ を満たすもの。

(2) S, T : qsep, $\text{Sch}_{\blacklozenge/S} \cong \text{Sch}_{\diamond/T} \Rightarrow \blacklozenge = \diamond$.

(3) S, T : 局所ネーター正規なら、以下は圏同値:

$$\begin{aligned} \text{Isom}(S, T) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}(\text{Sch}_{\blacklozenge/T}, \text{Sch}_{\blacklozenge/S}) \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

スキームは

- 下部集合
- 下部位相空間
- 構造層

からなるので、これらを一つずつ復元していきます。

今日は、時間の都合上、「ちゃんと復元をやる」のは下部集合だけにします。

Lemma

$f: Y \rightarrow X, g: Z \rightarrow X: \text{Sch}_{\diamond/S}$ の射
片方が準コンパクトであるとします。

このとき、 $\text{Sch}_{\diamond/S}$ でファイバー積 $Y \times_X^{\diamond} Z$ が存在し、これは次を満たす:

$\text{red} \notin \diamond$ なら $Y \times_X^{\diamond} Z \cong Y \times_X Z$.

$\text{red} \in \diamond$ なら $Y \times_X^{\diamond} Z \cong (Y \times_X Z)_{\text{red}}$.

とくに $Y \times_X Z$ と $Y \times_X^{\diamond} Z$ は同じ下部位相空間を持つ。

観察

点 $x \in X$ は、下部集合が一点であるような対象 Y からの射 $f : Y \rightarrow X$ で、 $\text{Im}(f) = \{x\}$ となるものによって決まる

なので、下部集合を復元するためには、とりあえず

one-pointed scheme (つまり、下部集合が一点であるようなスキーム)

を圏論的に特徴付けると良さそうです。

1pt. 性の圏論的特徴付け

$X \in \text{Sch}_{\diamond}/S$.

1pt. Scheme の圏論的特徴付け

$|X|$ が一点でない \iff

$\exists Y, Z \neq \emptyset, \exists Y \rightarrow X, Z \rightarrow X$ s.t. $Y \times_X^{\diamond} Z = \emptyset$

\therefore)

X が異なる二点 x_1, x_2 を持つ $\implies \text{Spec}(k(x_1)) \times_X^{\diamond} \text{Spec}(k(x_2)) = \emptyset$.

X が上の条件を満たす $\implies y \in Y, z \in Z$ の行き先が X の異なる二点を定める。

下部集合の復元 1

$X \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ に対して

$$\text{Pt}_{\blacklozenge/S}(X) :=^{\text{def}} \{(p_Z : Z \rightarrow X) \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S} \mid |Z|: \text{1pt. set}\} / \sim,$$

と定める。ここで

$$(p_Z : Z \rightarrow X) \sim (p_{Z'} : Z' \rightarrow X) \stackrel{\text{def}}{\iff} Z \times_{p_Z, X, p_{Z'}}^{\blacklozenge} Z' \neq \emptyset.$$

下部集合の復元

$\text{Pt}_{\blacklozenge/S} : \text{Sch}_{\blacklozenge/S} \rightarrow \text{Set}$ は関手で、忘却 $U_{\blacklozenge/S}^{\text{Set}} : \text{Sch}_{\blacklozenge/S} \rightarrow \text{Set}$ と自然同型。

下部集合の復元 2

$\text{Pt}_{\diamond/S}$ は圏論的に構成されているので、次が示せる：

Corollary

$F : \text{Sch}_{\diamond/S} \xrightarrow{\sim} \text{Sch}_{\diamond/T}$ が圏同値なら、 $U_{\diamond/S}^{\text{Set}} \cong U_{\diamond/T}^{\text{Set}} \circ F$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sch}_{\diamond/S} & \xrightarrow[\sim]{F} & \text{Sch}_{\diamond/T} \\ U_{\diamond/S}^{\text{Set}} \downarrow & & \downarrow U_{\diamond/T}^{\text{Set}} \\ \text{Set} & \xlongequal{\quad} & \text{Set} . \end{array}$$

正則モノ射

\mathcal{C} :圏、 $(f : X \rightarrow Y) \in \mathcal{C}$:射.

Definition

f が正則モノであるとは、

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g, h : Y \rightarrow Z$, s.t., f は (g, h) のイコライザー.

$\text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ の正則モノ射の性質

S : q.s., $(f : X \rightarrow Y) \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$: 正則モノ $\Rightarrow f$:埋め込み.

\therefore) f :正則モノ $\Rightarrow f$ はある対象 $Z \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ の diagonal 射 $Z \rightarrow Z \times_S^{\blacklozenge} Z$ の基底変換として表せるから (詳細略).

Corollary (被約性の圏論的特徴付け)

$X \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ が被約. $\iff [f : Y \rightarrow X$:全射 reg. mono. $\Rightarrow f$:同型]

\therefore) 全射な正則モノ射は全射閉埋め込みだから

射が閉埋め込みであることは以下のように特徴付けられます:

閉埋め込み

S : q.s., $(f : X \rightarrow Y) \in \text{Sch}_{\diamond}/S$.

f が閉埋め込み \iff

- f : 正則モノ
- $\forall (T \rightarrow Y)$ で基底変換 $X_{\diamond, T} = X \times_Y^{\diamond} T$ が存在
- $\forall (T \rightarrow Y), \forall t \in T$: 閉点 s.t. $t \notin \text{Im}(f_{\diamond, T} : X_{\diamond, T} \rightarrow T)$,
 $X_{\diamond, T} \amalg \text{Spec}(k(t)) \rightarrow T$: 正則モノ

従って、閉埋め込みであることを圏論的に特徴付けるには、与えられた点が閉点であることを圏論的に特徴付けることが十分です。なので “ $x_1 \rightsquigarrow x_2$ ” を圏論的に特徴付けたくになります。

Strongly Local 1

位相の復元のために、二点の間の支配関係を圏論的に特徴付けます

S : q.s., $X \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$, $x_1, x_2 \in X$.

Definition (Strongly Local)

(X, x_1, x_2) が $\text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ で **strongly local** であるとは: $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

- X : 連結.
- $\forall (f : Z \rightarrow X)$: 正則モノ、 $[x_1, x_2 \in \text{Im}(f), \Rightarrow f: \text{isom.}]$.
- $\text{Spec}(k(x_1)) \amalg \text{Spec}(k(x_2)) \rightarrow X$: エピ.
- $\text{Spec}(k(x_1)) \rightarrow X$: 正則モノ
- $\forall (f : Z \rightarrow X)$: 正則モノ,
 $[x_1 \notin \text{Im}(f), Z \neq \emptyset \Rightarrow Z \amalg \text{Spec}(k(x_1)) \rightarrow X$: は正則モノでない].

Remark

(X, x_1, x_2) が strongly local であることは $(\text{Sch}_{\blacklozenge/S}, X, x_1, x_2)$ から圏論的に定義されています。

S : q.s., $X \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$, $x_1, x_2 \in X$.

Strongly Local な対象の性質

(X, x_1, x_2) : strongly local、このとき

(1) X は局所整域の Spec と同型

(2) x_1, x_2 のうち一方が閉点でもう一方が生成点

とくに $x_1 \rightsquigarrow x_2$ または $x_2 \rightsquigarrow x_1$.

Strongly Local な対象の例

V を付値環の Spec 、 $v \in V$:閉点、 $\eta \in V$:生成点とすると

(V, v, η) は strongly local

“ $x_1 \rightsquigarrow x_2$ or $x_2 \rightsquigarrow x_1$ ” の圏論的特徴付け

S : q.s., $X \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$, $x_1, x_2 \in X$.

支配関係の存在の圏論的特徴付け

“ $x_1 \rightsquigarrow x_2$ or $x_2 \rightsquigarrow x_1$ ” \iff
 $\exists Z \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}, \exists z_1, z_2 \in Z, \exists (f : Z \rightarrow X) \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$, s.t.,
 (Z, z_1, z_2) : str. loc., **かつ** $\{f(z_1), f(z_2)\} = \{x_1, x_2\}$.

上の特徴付けを用いて、さらに “ $x_1 \rightsquigarrow x_2$ ” を圏論的に特徴付けることもできません (詳細は略)

Corollary

- (1) 閉埋め込みであることは圏論的に特徴付けられる。
- (2) 下部位相空間が圏論的に復元できる。

とくに、スキームや射の位相空間論的性質は圏論的に特徴付けられます (ex: q.s., q.c., sep., irred., local ($\cong \text{Spec}(\text{局所環})$), 開埋込, 普遍閉, etc.).

下部位相空間の復元

(Set の場合と同様)

$\forall F : \text{Sch}_{\diamond/S} \xrightarrow{\sim} \text{Sch}_{\diamond/T}$, 以下は up to isom で可換:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sch}_{\diamond/S} & \xrightarrow{\sim} & \text{Sch}_{\diamond/T} \\ U_{\diamond/S}^{\text{Top}} \downarrow & & \downarrow U_{\diamond/T}^{\text{Top}} \\ \text{Top} & \equiv & \text{Top} \end{array}$$

観察

$X \in \text{Sch}_{\diamond/S}$ の構造層を復元するためには、
環スキーム $\mathbb{A}^1_X \rightarrow X$ を圏論的に特徴付けたくくなります。

\mathbb{A}^1 はベース上有限表示なので、
射が有限表示であることを圏論的に特徴付けたくくなります。

アイデア

有限表示 $/S \doteq \text{Sch}_{/S}^{\text{op}}$ の “コンパクト対象”
(cf. Stacks Project, Limit of Schemes)

より正確には、

$X \rightarrow S: \text{f.p.} \iff$

$\forall (V_\lambda, f_{\lambda\mu})_{\lambda \in \Lambda}: \text{Sch}_{/S}$ の図式で、
s.t. $\Lambda: \text{cofiltered}$, $V_\lambda: \text{アフィン}$,
に対して、以下の自然な射が全射:

$$\varphi: \text{colim}_{\lambda \in \Lambda^{\text{op}}} \text{Hom}_{\text{Sch}_{/S}}(V_\lambda, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sch}_{/S}}(\lim_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, X).$$

S : 局所ネーター, $(f : X \rightarrow Y) \in \text{Sch}_{\blacklozenge}/S$, $x \in X$.

Proposition

$f_x^\# : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$: 本質的有限表示 \iff
 $\forall (V_\lambda, f_{\lambda\mu})_{\lambda \in \Lambda} : \text{Sch}_{\blacklozenge}/Y$ の図式 s.t. Λ : cofiltered, V_λ : local,
 $f_{\lambda\mu}$ (閉点) = $f(x)$,
 に対して、以下が全射:

$$\varphi : \text{colim}_{\lambda \in \Lambda^{\text{op}}} \text{Hom}_{\text{Sch}_{\blacklozenge}/Y}(V_\lambda, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sch}_{\blacklozenge}/Y}(\lim_{\lambda \in \Lambda}^\blacklozenge V_\lambda, X).$$

\therefore) よくある fp 射の圏論的コンパクト性を local な対象に限定して論じたらこうなります (詳細略)。

S : 局所ネーター, $(f : X \rightarrow Y) \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$.

loc fp 性の圏論的特徴付け

f : loc. f.p. \iff

- $\forall x \in X, f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$: 本質的有限表示
- $\forall (Z \rightarrow Y), \forall z \in Z$, 以下は全単射:

$$\varphi_{z,X} : \text{colim}_{W \in I_Z(z)^{\text{op}}} \text{Hom}_{\text{Sch}_{\blacklozenge/Y}}(W, X) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Sch}_{\blacklozenge/Y}}\left(\lim_{W \in I_Z(z)}^{\blacklozenge} W, X\right),$$

ここで $I_Z(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{i_W : W \rightarrow Z \mid i_W \text{開埋込}, z \in \text{Im}(i_W)\}$.

\therefore) よくある fp 射の圏論的コンパクト性を local な part とそれを近傍へ広げる part に分けるとこんな感じになります (詳細略)。

これまでに圏論性を獲得した性質のリスト

S : 局所ネーター

$\forall X \in \text{Sch}_{\diamond/S}$ で下部集合 $|X|$ は圏論的に復元されています。

以下のスキーム論的性質は圏論的に特徴付けられています:

- 被約性、既約性、integral 性, q.c., $\cong \text{Spec}(\text{局所環})$, $\cong \text{Spec}(\text{体})$, など.
- q.c., q.s., sep., 埋込, 閉埋込, 開埋込, 局所有限表示, 有限表示, 有限表示固有 (= sep. + f.p. + 普遍閉).

以下はまだです。

平坦, smooth, エタール, etc.

構造層復元のためのアイデア

$X \in \text{Sch}_{\diamond}/S$ の構造層を復元するためには、
 S 上の環スキーム \mathbb{A}_S^1 を圏論的に特徴付けたいとなります。

$$\mathbb{A}_S^1 = \mathbb{P}_S^1 \setminus \{\infty\},$$

なので \mathbb{P}_S^1 を圏論的に特徴付けたいとなります。

やること

\mathbb{P}^1 の圏論的特徴付けを与える。

$$\mathbb{P}_k^1 \iff \begin{cases} \bullet \text{ (有限表示) 固有 } \operatorname{Spec}(k) \\ \bullet \text{ 生成点の剰余体 } \cong k(t) \\ \bullet \operatorname{Spec}(k(t)) \text{ に「最も近い」} \end{cases}$$

なので $\operatorname{Spec}(k(t)) \rightarrow \operatorname{Spec}(k)$ を圏論的に特徴付けたくになります。
 アイデア: Lüroth の定理.

$k(t)/k$ の圏論的特徴付け

$f: Y \rightarrow \operatorname{Spec}(k)$ が $\operatorname{Spec}(k)$ 上 $\operatorname{Spec}(k(t)) \rightarrow \operatorname{Spec}(k)$ と同型 \iff

- $\exists K: \text{体}, Y \cong \operatorname{Spec}(K)$
- $f: \text{f.p. でない} (\iff K/k: \text{有限次拡大でない})$
- $k \subsetneq \forall L \subset K, \exists K \cong L \text{ over } k$ (Lüroth の定理).

$\rightsquigarrow \mathbb{P}_k^1 \rightarrow \operatorname{Spec}(k)$ の圏論的特徴付けができた!

DVR 上の \mathbb{A}^1

$\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ は環スキームの構造を持つ:

観察

1次元環スキームってそもそも \mathbb{A}^1 くらいしかないのでは??

⇒ DVR 上ではだいたいそう。

Lemma (♠♠♠)

R : DVR, $V := \text{Spec } R$, $K := \text{Frac}(R)$ $f: X \rightarrow V$: 平坦環スキーム / V .
 f が以下を満たせば、環スキームとして $X \cong \mathbb{A}_V^1$ となる:

- f の特殊 fiber は連結かつ 1 次元。
- f の generic fiber は \mathbb{A}_K^1

(証明は Neron model を念頭においてごちゃごちゃ頑張るだけです)

特殊 fiber の連結性を外すと反例があります: $\text{Spec}(R[x, (x^{p^2} - x^p)/\pi])$.

$\mathbb{P}_S^1 \iff \mathbb{P}^1$ -束 / S であって、 \exists 3 つの交わらない section s_1, s_2, s_3

\mathbb{P}^1 -束であることを圏論的に特徴付けたい.

ここで、 \mathbb{P}^1 -束 \Rightarrow 各 fiber が \mathbb{P}^1 .

Remark

- $\text{red} \in \blacklozenge$, 圏論的な意味での fiber 積は普通の fiber とは違いますが、
- generic fiber は開埋め込みの limit として表せるので、これは圏論的に get できます。

Theorem

S : 局所ネーター正規, $\diamond = \blacklozenge \cup \{\text{red}\}$, $(f : X \rightarrow S) \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$.

f が $\mathbb{P}_S^1 \rightarrow S$ と同型 $\iff f$ は以下を満たす:

- (1) f : 有限表示固有
- (2) $\forall s \in S, f^{-1}(s)_{\text{red}} \cong \mathbb{P}_{k(s)}^1$.
- (3) \forall generic pt. $\eta \in S, f^{-1}(\eta) \cong \mathbb{P}_{k(\eta)}^1$.
- (4) $\exists s_0, s_1, s_\infty$: f の交わらない sections.
- (5) $\forall i = 0, 1, \infty$ で $X \setminus s_i$ は $\text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ の環対象 s.t.
 s_j : 加法単位元, s_k : 乗法単位元, $\{i, j, k\} = \{0, 1, \infty\}$.
- (6) $\forall (g : Y \rightarrow S) \in \text{Sch}_{\blacklozenge/S}$ と $\forall t_0, t_1, t_\infty$: (1), ..., (5) を満たす別の sections、に対して
 $\exists ! h : X \rightarrow Y$: 閉埋込 s.t. $\forall i = 0, 1, \infty, f = g \circ h, h \circ s_i = t_i$.

証明

もし \mathbb{P}^1 が (6) を満たせば、(6) で要請されている一意性より、“ \Leftarrow 側”:
ok.

\therefore “ \Rightarrow 側”、すなわち \mathbb{P}_S^1 が (6) を満たすことを示せば良い
 Y が (1),..., (5) を満たすとして、以下の関手を定義します。

$$C : \text{Sch}_{/S}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set},$$

$$(T \rightarrow S) \mapsto \left\{ i : \mathbb{P}_T^1 \rightarrow Y_T \mid \begin{array}{l} i: \text{閉埋込,} \\ 0, 1, \infty \mapsto t_0, t_1, t_\infty \end{array} \right\}.$$

このとき

- C は S 上局所有限表示な代数空間
- (2) より、 $C \rightarrow S$ の各 fiber は一点集合
- (3) より、 $C \rightarrow S$ は双有理

示したいこと

$C(S)$ は一点集合

$W \stackrel{\text{def}}{=} \text{Spec}(\text{DVR}),$

$p: C_{\text{red}} \rightarrow S$: 構造射

$\forall (W \rightarrow S), (Y_W)_{\text{red}} \setminus t_{i,W}$: 平坦環スキーム $/W$.

$\therefore \forall W, C(W)$: 1 点集合

補題 (♠♠♠) より,

$p: C_{\text{red}} \rightarrow S$ は局所有限表示全単射双有理、支配関係を保つ

\rightsquigarrow 構成可能集合に関する Chevalley の定理より p は同相

\rightsquigarrow 付値判定法より p は固有全単射双有理

$\rightsquigarrow p$ は双有理有限射

S は正規なので、ZMT より $p: C_{\text{red}} \xrightarrow{\sim} S$ は同型.

とくに $C(S)$ は一元集合 Q.E.D.

主定理

(Set, Top の場合と同様)

$\forall F : \text{Sch}_{\diamond/S} \xrightarrow{\sim} \text{Sch}_{\diamond/T}$: 圏同値,

以下は up to isom で可換:

$$\begin{array}{ccc} \text{Sch}_{\diamond/S} & \xrightarrow{\sim} & \text{Sch}_{\diamond/T} \\ U_{\diamond/S}^{\text{Sch}} \downarrow & & \downarrow U_{\diamond/T}^{\text{Sch}} \\ \text{Sch} & \xlongequal{\quad} & \text{Sch}. \end{array}$$

さらに、以下は圏同値:

$$\text{Isom}(S, T) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Isom}(\text{Sch}_{\diamond/T}, \text{Sch}_{\diamond/S}).$$

(1) 本当は「局所ネーター」の仮定を外したかった...

今のところ諦めています...

(2) 以下については確認しています:

- ネータースキーム S は有限 S -スキームの圏や固有 S -スキームの圏から復元できる
- log スキームの圏でも同様の復元ができる:
cf. Monomorphisms in Categories of Log Schemes [Mzk2012]
↑最初の望月先生の証明は log スキームの復元の方が回っていないくて、これは訂正論文です。
私が確認しているのはこれよりももう少し強い結果です。
- K, L : 体、 $\mathcal{C}: K, K(x)$ を含む Fld_K の full sub、 $\mathcal{D}: L, L(x)$ を含む Fld_L の full sub、 $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ なら $K \cong L$
- ($n \geq 2$) $PGL_n(K)$ や $GL_n(K)$ の群としての構造から n と K を復元できる、特に $PGL_n(K) \cong PGL_m(L) \Rightarrow n = m, K \cong L$