接続に関する基礎事項を jet バンドルの用語で書き直す

ゆじ

2021 年 7 月 12 日

これは接続に関する基礎事項を jet バンドル (のような何か) を用いて線形に書き直したノートである。

1　スキーム論的な視点で見た jet

X が S-スキームであるときには、$X \times_S X$ の対角の r-次無限小近傍を $X^{(r)}$ と書き、第一、第二射影を $p, q : X^{(r)} \to X$ で表す。

Definition 1.1. $J^r(E) :\overset{\text{def}}{=} q_* p^* E$

Remark 1.2. $J^r(-)$ という操作は函手的である。

1.1　基本的な完全系列

r-次無限小部分を 0 にすることによって自然な完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sym}^r(\Omega_{X/S}) \otimes E \longrightarrow J^r(E) \longrightarrow J^{r-1}(E) \longrightarrow 0$$

を得る。とくに $r = 1$ とすることで完全列

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/S} \otimes E \longrightarrow J^1(E) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

を得る。

後で見るように、E 上の接続とは、この ($r = 1$ の場合の) 完全系列の分裂 $E \to J^1(E)$ のことである (cf. subsection 2.1)。

1.2　テンソル

二つのベクトル束 E_1, E_2 に対して、自然な射

$$q^* q_* p^* E_i \to p^* E_i$$

をテンソルすることで、射

$$q^*(J^r(E_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} J^r(E_2)) = q^*((q_* p^* E_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} (q_* p^* E^2)) \xrightarrow{\sim} (q^* q_* p^* E_1) \otimes_{\mathcal{O}_{X^{(1)}}} (q^* q_* p^* E_2) \to p^* E_1 \otimes_{\mathcal{O}_{X^{(1)}}} p^* E_2 \to p^*(E_1 \otimes_{\mathcal{O}_{X^{(}}$$

を得る。q_* は q^* の右随伴であるから、射

$$J^r(E_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} J^r(E_2) \to J^r(E_1 \otimes E_2)$$

を得る。この射は r を小さくすることによって得られる全射と可換であり、さらに E_1, E_2 について函手的である。

1.3 アーベル群の層としての直和分解

$p, q : X^{(r)} \to X$ は、下部位相空間の間の射はどちらも $\mathrm{id}_{|X|}$ であるため、アーベル群の層としては $q_*(-) = p_*(-)$ となる。従って、アーベル群の層としては $q_* p^* E = p_* p^* E$ であり、自然な全射 $J^r(E) \to E$ のアーベル群の層としての自然な分裂 $E \to J^r(E)$ を得る。これを d^r で表す。d^r は $\mathcal{O}_X$-線形ではない。

$r = 1$ とする。このとき、$J^1(E)$ はアーベル群として $E \oplus (\Omega_X \otimes E)$ と直和分解する。

2 接続

Definition 2.1 (接続)**.** M を多様体、E をベクトル束とする。E 上の**接続**とは、$\mathbb{R}$-線形写像 $\nabla : E \to \Omega \otimes E$ であって、任意の $s \in E$ と $f \in \mathcal{O}_N$ に対して $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$ が成り立つもののことを言う。

2.1 Jet による解釈

2.2 双対接続

Definition 2.2 (双対接続)**.** $\nabla : E \to J^1(E)$ を接続とする。∇ は $X^{(1)}$ 上の層の射 $\tilde{\nabla} : q^*E \xrightarrow{\sim} p^*E$ と対応する。$\tilde{\nabla}$ の双対の逆射 $(\tilde{\nabla}^*)^{-1} : q^*E^* \xrightarrow{\sim} p^*E^*$ と対応する射 $E^* \to J^1(E^*)$ を ∇ の**双対接続**という。

Remark 2.3.

2.3 テンソル積

2.4 計量

ベクトル束 E 上に計量を与えることは、同型射 $h : E \xrightarrow{\sim} E^*$ を与えることと等しい。

Lemma 2.4. h を E 上の計量、∇ をベクトル束 E 上の接続、∇^* を双対接続とする。∇ が h と可換であるための必要十分条件は、以下の図式が可換であることである：

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\nabla} & J^1(E) \\
{\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J^1(h)} \\
E^* & \xrightarrow{\nabla^*} & J^1(E^*).
\end{array}$$

Proof. $\{e_a\}$ を局所 frame, $\{e_*^a\}$ をその双対 frame, $h(e_a) = h_{ab}e_*^b$, $\underline{\nabla}(e_a) = A_a^b \otimes e_b$ (ここで A_a^b はこの

frame をとっている開集合上の 1-form) とおいて計算すると、

$$\begin{aligned}(J^1(h)\circ\nabla)(e_a) &= J^1(h)(e_a, \underline{\nabla}(e_a)) \\ &= (h_{ab}e_*^b, h_{bc}A_a^b \otimes e_*^c), \\ (\nabla^*\circ h)(e_a) &= \nabla^*(h_{ab}e_*^b) \\ &= (h_{ab}e_*^b, \underline{\nabla}^*(h_{ab}e_*^b)) \\ &= (h_{ab}e_*^b, dh_{ab}\otimes e_*^b - h_{ab}A_b^c \otimes e_*^c)\end{aligned}$$

となる。従って、上記の図式の可換性は $dh_{ab} = h_{ab}A_b^c + h_{bc}A_a^b$ が成り立つことと同値であり、これは h が ∇ と可換であることに他ならない。

3 $J^1 J^1$

3.1 共変外微分

3.2 曲率

4 Gauss の方程式

この section では、

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E_2 \longrightarrow 0$$

をベクトル束の完全列とし、$\nabla : E \to J^1(E)$ を接続とする。

4.1 第二基本形式とシェイプ作用素

Definition 4.1 (第二基本形式)**.** $S^\nabla :\overset{\text{def}}{=} J^1(p)\circ\nabla\circ i : E_1 \to J^1(E_2)$ を**第二基本形式**という (たんに S と書くこともある)。

Remark 4.2. 自然な全射を $p_E : J^1(E) \to E, p_{E_2} : J^1(E_2) \to E_2$ と書くと、

$$p_{E_2}\circ S = p_{E_2}\circ J^1(p)\circ\nabla\circ i = p\circ p_E\circ\nabla\circ i = p\circ i = 0$$

となるので、$S : E_1 \to J^1(E_2)$ は実際には $\Omega\otimes E_2 \subset J^1(E_2)$ を一意的に経由する。

Remark 4.3. 第二基本形式は、E の計量によらない。実際、この節ではまだ E に計量が入っていることを仮定していない。

$h : E \xrightarrow{\sim} E^*$ を E の計量とする。さらに、

- $h_1 :\overset{\text{def}}{=} i^*\circ h\circ i : E_1 \xrightarrow{\sim} E_1^*$ を E_1 上の誘導計量、
- $h_2 :\overset{\text{def}}{=} (q\circ h^{-1}\circ q^*)^{-1} : E_2 \xrightarrow{\sim} E_2^*$ を E_2 上の誘導計量、
- $p :\overset{\text{def}}{=} h_1^{-1}\circ i^*\circ h : E \to E_1$ を h が定める $i : E_1 \to E$ の retract、
- $j :\overset{\text{def}}{=} h^{-1}\circ q^*\circ h_2 : E_2 \to E$ を h が定める $q : E \to E_2$ の split

とする。このとき、定義より、$h_1\circ p = i^*\circ h, h\circ j = q^*\circ h_2$ が成り立つ。

Definition 4.4 (シェイプ作用素)**.** $A^{\nabla} :\overset{\mathrm{def}}{=} J^1(p)\circ\nabla\circ j : E_2 \to J^1(E_1)$ を**シェイプ作用素** (shape operator) という。しばしば ∇ を省略してたんに A と書く。

Remark 4.5. 第二基本形式の場合と同様に、実際には、$A : E_2 \to J^1(E_1)$ は $\Omega \otimes E_1 \subset J^1(E_1)$ を一意的に経由する。

Proposition 4.6. S を ∇ の第二基本形式、A を ∇ のシェイプ作用素、$\nabla^* : E^* \to J^1(E^*)$ を双対接続、S^* を ∇^* の第二基本形式、A^* を ∇^* のシェイプ作用素とする。

(i) $S^* = J^1(i^*)\circ\nabla^*\circ q^* : E_2^* \to J^1(E_1^*)$ である。
(ii) $A^* = J^1(j^*)\circ\nabla^*\circ p^* : E_1^* \to J^1(E_2^*)$ である。
(iii) 以下の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{S} & J^1(E_2) \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J^1(h_2)} \\ E_1^* & \xrightarrow{A^*} & J^1(E_2^*). \end{array}$$

(iv) 以下の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{A} & J^1(E_1) \\ {\scriptstyle h_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J^1(h_1)} \\ E_2^* & \xrightarrow{S^*} & J^1(E_1^*). \end{array}$$

Proof. (i) と (ii) は定義より従う。(iii) を示す。計算すると、

$$\begin{aligned} J^1(h_2)\circ S &= J^1(h_2)\circ J^1(q)\circ\nabla\circ i \\ &= J^1(j^*)\circ J^1(h)\circ\nabla\circ i \\ &= J^1(j^*)\circ\nabla^*\circ h\circ i \\ &= J^1(j^*)\circ\nabla^*\circ p^*\circ h_1 \\ &= A^*\circ h_1 \end{aligned}$$

となる。以上で (iii) が示された。(iv) を示す。計算すると、

$$\begin{aligned} J^1(h_1)\circ A &= J^1(h_1)\circ J^1(p)\circ\nabla\circ j \\ &= J^1(i^*)\circ J^1(h)\circ\nabla\circ j \\ &= J^1(i^*)\circ\nabla^*\circ h\circ j \\ &= J^1(i^*)\circ\nabla^*\circ q^*\circ h_2 \\ &= S^*\circ h_2 \end{aligned}$$

となる。以上で 4.6 の証明を完了する。 ✎

Remark 4.7. $\Omega\otimes E_1 \subset J^1(E_1)$ と $\Omega\otimes E_2 \subset J^1(E_2)$ の成分を見れば、

$$h(S(e_1), e_2) = h(e_1, A^*(e_2))$$

となる。

4.2 Gauss の方程式

E 上の接続 ∇ と計量 h によって定まる E_1 の誘導接続を $\nabla^{\top} :\overset{\mathrm{def}}{=} J^1(p) \circ \nabla \circ i : E_1 \to J^1(E_1)$ と表す。

E 上の接続 ∇ の曲率 $R : E \to J^1(J^1(E))$ の E_1 の成分を E_1 上の誘導接続 $\nabla^{\top}$ の曲率 $R^{\top}$ と比較したものを **Gauss の方程式**と言う。

Lemma 4.8. $\nabla \circ i = J^1(i) \circ \nabla^{\top} + J^1(j) \circ S$.

Proof. $\mathrm{id}_{J^1(E)} = J^1(i) \circ J^1(p) + J^1(j) \circ J^1(q)$ であるから、計算すれば

$$\begin{aligned} \nabla \circ i &= \mathrm{id}_{J^1(E)} \circ \nabla \circ i \\ &= J^1(i) \circ J^1(p) \circ \nabla \circ i + J^1(j) \circ J^1(q) \circ \nabla \circ i \\ &= J^1(i) \circ \nabla^{\top} + J^1(j) \circ S \end{aligned}$$

となる。

Theorem 4.9 (Gauss の方程式)**.** $h_2 : E_2 \xrightarrow{\sim} E_2^*$ を誘導計量とする。このとき、以下の等式が成り立つ：

$$J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(J^1(h)) \circ R \circ i = J^1(S^*) \circ J^1(h_2) \circ S + J^1(J^1(h_1)) \circ R^{\top}.$$

Proof. ∇^* を双対接続とする。計算すると、

$$\begin{aligned} & J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(J^1(h)) \circ R \circ i \\ &= J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(J^1(h)) \circ J^1(\nabla) \circ \nabla \circ i \\ &\overset{\bigstar}{=} J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(J^1(h)) \circ J^1(\nabla) \circ J^1(i) \circ \nabla^{\top} + J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(J^1(h)) \circ J^1(\nabla) \circ J^1(j) \circ S \\ &\overset{\spadesuit}{=} J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(J^1(h)) \circ J^1(\nabla) \circ J^1(i) \circ \nabla^{\top} + J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(\nabla^*) \circ J^1(h) \circ J^1(j) \circ S \\ &\overset{\clubsuit}{=} J^1(J^1(h_1)) \circ J^1(J^1(p)) \circ J^1(\nabla) \circ J^1(i) \circ \nabla^{\top} + J^1(J^1(i^*)) \circ J^1(\nabla^*) \circ J^1(q^*) \circ J^1(h_2) \circ S \\ &= J^1(J^1(h_1)) \circ J^1(\nabla^{\top}) \circ \nabla^{\top} + J^1(S^*) \circ J^1(h_1) \circ S \\ &= J^1(J^1(h_1)) \circ R^{\top} + J^1(S^*) \circ J^1(h_1) \circ S \end{aligned}$$

となる。ただし $\bigstar$ の箇所で Lemma 4.8を用い、$\spadesuit$ の箇所で Lemma 4.8を用い、$\clubsuit$ の箇所で等式 $i^* \circ h = h_1 \circ p$ と $h \circ j = q^* \circ h_2$ を用いた。以上で Theorem 4.9の証明を完了する。