Monoids の Push-out の Quasi-Integral 性

ゆじ

2022 年 10 月 15 日

モノイドは可換で単位元を持つとする。演算は加法で表し、単位元は 0 と表記する。

定義 1. M をモノイドとする。

- 自明なモノイドを (軽微な記号の濫用により) 0 と表す。
- $M^\times :\overset{\text{def}}{=} \{m \in M | \exists m' \in M, m' + m = 0\}$.
- M が **sharp** であるとは、$M^\times = 0$ となることを言う。
- $M^{\text{gp}} :\overset{\text{def}}{=} (M \times M)/\sim$, ただし

$$(m_1, m_2) \sim (m_1', m_2') \;:\overset{\text{def}}{\iff}\; \exists m \in M, m_1 + m_2' + m = m_1' + m_2 + m.$$

- $\eta_M : M \to M^{\text{gp}}$ を $\eta_M(m) = \overline{(m, 0)}$ で定める。これは M に関して函手的である。
- モノイド M が **integral** であるとは、η_M が単射であることを言う。
- モノイド M が **pre-integral** であるとは、$\eta_M|_{M^\times} : M^\times \to M^{\text{gp}}$ が単射であることを言う。
- Mon ですべてのモノイドのなす圏、Ab ですべてのアーベル群のなす圏を表し、$\sqcup$ は Mon の中での push-out を表す。

注意 2. Ab $\subset$ Mon は $(-)^{\text{gp}}$ を右随伴に持つ包含函手であるので、特に余極限と可換する。

補題 3. $M \overset{f}{\leftarrow} N \overset{g}{\to} L$ をモノイドの図式とする。$P :\overset{\text{def}}{=} M \sqcup_N L$ と置く (ただしこれは Mon における push-out である)。このとき、自然な射 $q : M \sqcup L \to M \sqcup_N L$ は全射である。

Proof. $Q :\overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(q)$ と置き、$i : Q \hookrightarrow P$ を包含射、$q' : M \sqcup L \to Q$ を $q = i \circ q'$ となる射とする。もし q が全射ではないとすると、push-out の普遍性より、ある $r : P \to Q$ が存在して $q' = r \circ q$ が成り立つ。q' は全射であるから、r も全射である。また、$i \circ r \circ q = i \circ q' = q$ であるから、push-out の普遍性より $i \circ r = \mathrm{id}_P$ が成り立つ。よって r は単射でもある。従って r は同型射となり、$P = Q$ が従う。以上で補題 3の証明を完了する。 □

補題 4. M をモノイドとする。

(i) 任意の $m \in M$ に対し、$(m, m) \in M \times M$ の定める同値類 $[(m, m)] \in M^{\text{gp}}$ は 0 である。
(ii) 任意の $m \in M^{\text{gp}}$ に対し、ある $a, b \in M$ が存在し、$m + \eta_M(a) = \eta_M(b)$ となる。

(iii) 任意の $a, b \in M$ に対し、$\eta_M(a) = \eta_M(b)$ であるならば、ある $c \in M$ が存在して $a + c = b + c$ が成り立つ。

Proof. (i)は、$m+0 = 0+m$ であることと同値関係の定義より従う。(ii)は、$m = [(b, a)]$ と表すことによって $m = \eta_M(b) - \eta_M(a)$ となるので、これから帰結する ((i)より $-\eta_M(a) = [(0, a)]$ となることに注意)。(iii)は、同値関係の定義より、$[(a, 0)] = [(b, 0)]$ であるとすると、ある $c \in M$ が存在して $a+c = a+0+c = 0+b+c = b+c$ となるので、このことから帰結する。以上で補題 4の証明を完了する。 □

定義 5 (Quasi-integral)**.** モノイド M が **quasi-integral** であるとは、任意の $a, b \in M$ に対して、以下が成り立つことを言う:

$$a + b = a \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

補題 6. M をモノイドとする。

(i) M が quasi-integral であるための必要十分条件は、$\eta_M^{-1}(0) = 0$ となることである。

(ii) integral $\Rightarrow$ quasi-integral $\Rightarrow$ pre-integral.

Proof. (i)を示す。まず必要性を示す。M が quasi-integral であるとして、$a \in M$ が $\eta_M(a) = 0$ を満たすとする。このとき、$\eta_M(a) = 0 = \eta_M(0)$ であるから、補題 4 (iii)よりある $c \in M$ が存在して $a + c = c$ となる。M は quasi-integral なので、$a = 0$ が従う。以上で必要性の証明を完了する。次に十分性を証明する。$\eta_M^{-1}(0) = 0$ であると仮定して、$a, b \in M$ が $a + b = a$ を満たすとする。このとき、$\eta_M(a) + \eta_M(b) = \eta_M(a)$ が成り立つので、$\eta_M(b) = 0$ である。従って $b \in \eta_M^{-1}(0) = 0$ となり $b = 0$ である。以上で(i)の証明を完了する。

(ii)を示す。η_M が単射であれば $\eta_M^{-1}(0) = 0$ であるから、(i)より「integral⇒quasi-integral」が従う。$\ker(\eta_M|_{M^\times}) \subset \eta_M^{-1}(0)$ であるから、(i)より「quasi-integral⇒pre-integral」が従う。以上で補題 6の証明を完了する。 □

補題 7. M をモノイド、P を quasi-integral なモノイドとして、$f : M \to P$ をモノイドの射とする。このとき、自然な射 $P^\times \times_P M \to P^\times \times_{P^{\mathrm{gp}}} M$ は同型射である。特に、M が sharp で integral なモノイドであれば、$P^\times \times_P M = 0$ となる。

Proof. まず、補題 6(ii)より P は pre-integral である。従って $P^\times \to P^{\mathrm{gp}}$ は単射であり、$P^\times \times_P M \to P^\times \times_{P^{\mathrm{gp}}} M$ は M の部分モノイドの間の包含射とみなすことができる (単射である)。よって補題 7を示すためには、この射が全射であることを証明することが十分である。$m \in M$ が $f^{\mathrm{gp}}(m) \in \eta_P(P^\times)$ を満たすとする。示すべきことは、$f(m) \in P^\times$ となることである。$f^{\mathrm{gp}}(m) \in \eta_P(P^\times)$ であるから、ある $p \in P^\times$ が存在して $\eta_P(p) = f^{\mathrm{gp}}(m)$ となる。η の函手性より、$f^{\mathrm{gp}}(m) = \eta_P(f(m))$ となる。ここで $p \in P^\times$ であるから、$\exists[-p] \in P$ である。この $-p \in P$ を $\eta_P(p) = f^{\mathrm{gp}}(m) = \eta_P(f(m))$ の両辺に足すことで、$0 = \eta_P(p) + \eta_P(-p) = \eta_P(f(m)) + \eta_P(-p) = \eta_P(f(m) - p)$ が成り立つ。P は quasi-integral であるから、補題 6 (i)より、$f(m) - p \in \eta_P^{-1}(0) = 0$ となる。よって $f(m) = p$ であり、$f(m) \in P^\times$ が従う。

また、M が sharp で integral であるときは、$P^\times \times_P M \to P^\times \times_{P^{\mathrm{gp}}} M \to M$ を M^{gp} の部分モノイドの間

の包含射とみなすことで

$$P^\times \times_P M \subset P^\times \times_{P^{\mathrm{gp}}} M = (P^\times \times_{P^{\mathrm{gp}}} M^{\mathrm{gp}}) \times_{M^{\mathrm{gp}}} M = (P^\times \times_{P^{\mathrm{gp}}} M^{\mathrm{gp}}) \cap M \subset M^\times$$

が成り立つので、最後の主張はこれより従う。以上で補題 7の証明を完了する。 □

命題 8 (中山の呪い, cf. [Nak, Lemma 2.2.6])**.** $M \xleftarrow{f} N \xrightarrow{g} L$ をモノイドの図式で、M と L は sharp かつ integral であるとする。$P :\overset{\mathrm{def}}{=} M \sqcup_N L$ と置く (ただしこれは Mon における push-out である)。このとき、次は同値である:

(i) P は quasi-integral である。

(ii) 任意の $n \in N^{\mathrm{gp}}$ に対して、$f^{\mathrm{gp}}(n) \in \mathrm{Im}(\eta_M)$ と $g^{\mathrm{gp}}(-n) \in \mathrm{Im}(\eta_L)$ が成り立てば、$f^{\mathrm{gp}}(n) = 0$ と $g^{\mathrm{gp}}(-n) = 0$ が帰結する。

Proof. まず「(ii) ⇒ (i)」を証明する。$p \in P$ が $\eta_P(p) = 0$ を満たしているとする。$p = 0$ を示せば良い。$i_M : M \to P$ と $i_L : L \to P$ を自然な射とする。補題 3より、ある $m \in M, l \in L$ が存在して $p = i_M(m) + i_L(l)$ が成り立つ。η の函手性より $i_M^{\mathrm{gp}}(\eta_M(m)) + i_L^{\mathrm{gp}}(\eta_L(l)) = \eta_P(p) = 0$ が成り立つから、注意 2より、ある $n \in N^{\mathrm{gp}}$ が存在して、$\eta_M(m) = f^{\mathrm{gp}}(n)$ と $\eta_L(l) = g^{\mathrm{gp}}(-n)$ が成り立つ。ここで(ii)より、$m = 0$ と $l = 0$ が従う。これは $p = i_M(m) + i_L(l) = 0$ を導く。以上で「(ii) ⇒ (i)」の証明を完了する。

次に「(i) ⇒ (ii)」を証明する。P が quasi-integral であると仮定し、$n \in N^{\mathrm{gp}}$ が $f^{\mathrm{gp}}(n) \in \mathrm{Im}(\eta_M)$ と $g^{\mathrm{gp}}(-n) \in L^{\mathrm{gp}}$ を満たすとする。$\eta_M(m) = f^{\mathrm{gp}}(n)$ となる $m \in M$ と $\eta_L(l) = g^{\mathrm{gp}}(-n)$ となる $l \in L$ をとる。$h = i_M \circ f = i_N \circ g$ と置く。このとき、η の函手性より、

$$\eta_P(i_M(m) + i_L(l)) = i_M^{\mathrm{gp}}(f^{\mathrm{gp}}(n)) + i_L^{\mathrm{gp}}(g^{\mathrm{gp}}(-n)) = h^{\mathrm{gp}}(n + (-n)) = 0$$

となる。よって(i) (P の quasi-integral 性) と補題 6 (i)より、$i_M(m) + i_L(l) = 0$ が成り立つ。とくに、$i_M(m), i_L(l) \in P^\times$ が成り立つ。ここで M, L はどちらも sharp かつ integral であるから、補題 7より、$m \in M \times_P P^{\mathrm{gp}} = 0$ と $l \in L \times_P P^{\mathrm{gp}} = 0$ が従い、よって $f^{\mathrm{gp}}(n) = \eta_M(m) = 0$ と $g^{\mathrm{gp}}(-n) = \eta_L(l) = 0$ が帰結する。以上で命題 8の証明を完了する。 □

参考文献

[Nak] C. Nakayama, *Log Étale Cohomology*, Math. Ann. **308** (1997), 365-404.