Hartshorne Exercise V.2.5 Values of e

ゆじ

2020 年 10 月 16 日

このノートでは、[Ha, 演習 V.2.5] に解答を与える。基礎体 k は代数閉体であるとする。

Definition 0.1. C を (滑らかで射影的な) 曲線とする。

- K を C の**標準因子**とする。これは直線束 Ω_C に対応する因子であり、線形同値を除いて一意的に定まる。
- E を C 上の局所自由層とする。E が**分解可能**であるとは、$E \cong E_1 \oplus E_2$ となる 0 でない局所自由層 E_1, E_2 が存在することを言う。E が**分解不可能**であるとは、E が分解可能でないことを言う。
- E を C 上のランク 2 の局所自由層とする。E が**正規化されている**とは、E が $\mathcal{O}_C$ と同型な部分直線束 L を持ち、さらにその L が E の次数最大の部分直線束であることを言う (E が $\mathcal{O}_C$ と同型でない次数 0 の部分直線束を持つ可能性は排除していない)。$L \subset E$ を E に含まれる直線束であって、その次数が最大となるものとすると、$L \subset L' \subset E$ となる直線束 L' は存在しない。従って、E/L は直線束となる。さらにこのとき、$E \otimes L^\vee$ は正規化されていることに注意しておく。すなわち、どのようなランク 2 の局所自由層も、適切に直線束を選択して捻ることで、いつでも正規化することができる。
  E が正規化されていて単射 $i : \mathcal{O}_C \to E$ が与えられているとする。このとき $\mathrm{coker}(i)$ のねじれ部分の E での逆像は、$\mathrm{Im}(i)$ を真に含む E の部分直線束である。E が正規化されていることから、これは $\mathrm{Im}(i)$ に他ならない。従って $\mathrm{coker}(i)$ は直線束となる。
- 曲面 X が C 上の**線織曲面**であるとは、射 $X \to C$ と C 上のランク 2 の局所自由層 E があって、C 上で $X \cong \mathbb{P}_C(E)$ となることを言う。L を任意の直線束とするとき、C 上で $\mathbb{P}_C(E) \cong \mathbb{P}_C(E \otimes L)$ となる。従って、E を正規化されているように選択することが可能である。
- 次の事実に注意しておく ([Ha, 演習 II.7.9], [Ha, 演習 III.12.5], [Ha, 命題 V.2.2], [Ha, 命題 V.2.3], [Ha, 命題 V.2.8] なども参照)：二つの (同じランクの) 局所自由層 E, E' について、C 上で同型 $f : \mathbb{P}_C(E) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_C(E')$ が存在すれば、ある直線束 L が存在して、$E \otimes L \cong E'$ となる。なぜなら、$p : \mathbb{P}_C(E) \to C, p' : \mathbb{P}_C(E') \to C$ をそれぞれ射影とすると、$p = p' \circ f$ であり、従って直線束 $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_C(E')/C}(1)$ の $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_C(E)/C) :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_C(E))/p^*\,\mathrm{Pic}(C) \cong \mathbb{Z}$ における剰余類はこの巡回群の生成元を与え、それは $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_C(E)/C}(1)$ の剰余類と等しい。このことは、ある C 上の直線束 L が存在し、$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_C(E)/C}(1) \cong p^*L \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_C(E')/C}(1)$ となることを示している。p で push して射影公式を適用することで、$E \cong L \otimes E'$ を得る。
  さて、$X \cong \mathbb{P}_C(E)$ が線織曲面であるとし、E を正規化されているように選んでおく。別の正規化された E' により $X \cong \mathbb{P}_C(E')$ が成立するなら、C 上のある直線束 L が存在して $E \cong E' \otimes L$ となる。E, E' はともに正規化されているので、それぞれ $\mathcal{O}_C$ と同型な部分直線束を持ち、さらにそれらは E, E' の次数最大の部分直線束である。従って、このような L は次数が 0 でなければならない (正規化されて

いる E のうちでもまだ選択の自由は残されている)。よって、等式

$$\deg(\det(E)) = \deg(\det(E' \otimes L)) = \deg(\det(E') \otimes L^{\otimes 2}) = \deg(\det(E'))$$

が成立する。このことは、$X \cong \mathbb{P}_C(E)$ と表した際に、E をどのように選択しても、それが正規化されていれば、$\deg(\det(E))$ は不変であることを示している。すなわち、この量は線織曲面 C の**不変量**である。この不変量を $e :\overset{\mathrm{def}}{=} -\deg(\det(E))$ と表す。

このノートで解答を与えるのは、以下の演習問題である：

Exercise ([Ha, 演習 V.2.5])**.** C を種数 $g \geq 1$ の曲線とする。

(i) 各 $0 \leq e \leq 2g-2$ に対して、不変量 e を持つ C 上の線織曲面 X であって分解不可能な E に対応するものがあることを示せ。

(ii) $e < 0$ として、D を次数 $d :\overset{\mathrm{def}}{=} -e$ の任意の因子とし、$\xi \in H^1(C, \mathcal{O}_C(-D))$ を 0 でない元、これの定める拡大を

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow 0$$

とする。Serre 双対によって ξ は (0 でない) 線形写像 $H^0(C, \mathcal{O}_C(D+K)) \to k$ と見做せて、余次元 1 の部分空間 $H :\overset{\mathrm{def}}{=} \ker(\xi) \subset H^0(C, \mathcal{O}_C(D+K))$ を得る。次数 $d-1$ の有効因子 D' に対して自然に定まる包含射 $\mathcal{O}_C(-D') \subset \mathcal{O}_C$ を $\mathcal{O}_C(D+K)$ で捻って大域切断をとることにより $L_{D'} :\overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Im}(H^0(C, \mathcal{O}_C(D+K-D')) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(D+K)))$ と定義する。
E が正規化されているのは、どのような次数 $d-1$ の有効因子 D' に対しても $L_{D'} \not\subset H$ となるとき、またそのときに限ることを示せ。

(iii) ここで $-g \leq e < 0$ ならば、C 上の線織曲面 X であって不変量が e であるようなものが存在することを示せ。

(iv) $g = 2$ について、$e \geq -2$ は X の存在のための必要条件でもあることを示せ。

[Ha, 演習 V.2.5] では、注として、任意の線織曲面 X に対して $e \geq -g$ である (Nagata の結果) ことが記述されている。このノートでは (iv) よりも一般的な事実である Nagata の結果に証明を与えることで (iv) に解答を与える。

1　解答

この節では (i) と (ii) に解答を与える。

(i) の解答. $0 \leq e \leq 2g-2$ とし、D を次数 e の有効因子で、$K - D$ もまた有効因子となるものとする。そのような D は $e \leq 2g-2$ であることから必ず存在する。$K - D$ が有効因子であることから、0 でない元 $\xi \in H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(K-D))^\vee$ が存在する。ξ の定める拡大

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_C(-D) \longrightarrow 0$$

によってランク 2 の局所自由層 E を定義すると、$\xi \neq 0$ であることから E は分解不可能である。もし E が次数 1 以上の部分直線束 $L \subset E$ を持つならば、合成射 $L \subset E \to \mathcal{O}_C(-D)$ は $\deg(-D) \leq 0$ であることから 0-射でなければならない。従って、$L \subset \ker(E \to \mathcal{O}_C(-D)) = \mathcal{O}_C$ であることがわかるので、これは L の次数

が 1 以上であることと矛盾する。よって E は次数 1 以上の部分直線束を持たない。このことは E が正規化されていることを示している。従って、線織曲面 X の不変量は $-\deg(\det(E))$ として計算され、上の完全列からこれは e に他ならない。以上で (i) の解答を完了する。

(ii) の解答. E が正規化されているとする。D' を次数 $d-1$ の有効因子とする。D' によって包含射 $\mathcal{O}_C \xrightarrow{D'} \mathcal{O}_C(D')$ が定まり、以下のように二つの完全列の間の射を得る：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-D) & \longrightarrow & E\otimes\mathcal{O}_C(-D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D'} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(D'-D) & \longrightarrow & E\otimes\mathcal{O}_C(D'-D) & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(D') & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

コホモロジーをとって、連結準同型の部分を観察する：

$$\begin{array}{ccccc} & & H^0(\mathcal{O}_C) & \xrightarrow{1\mapsto\xi} & H^1(\mathcal{O}_C(-D)) \\ & & {\scriptstyle D'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H^0(E\otimes\mathcal{O}_C(D'-D)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_C(D')) & \xrightarrow{\gamma} & H^1(\mathcal{O}_C(D'-D)) \end{array}$$

$\deg(D'-D) = -1$ であることと E が正規化されていることから、$E\otimes\mathcal{O}_C(D'-D)$ の部分直線束の次数の最大値は -1 である。このことは $H^0(E\otimes\mathcal{O}_C(D'-D)) = 0$ であることを示している。従って γ は単射であり、$f(\xi) \neq 0$ である。Serre 双対を取ることで $L_{D'} \not\subset H$ となることがわかる。

逆に E が正規化されていないと仮定する。このとき、E は次数 1 の部分直線束 $L \subset E$ を含む。$L \subset E$ であるから、$H^0(E\otimes L^\vee) \neq 0$ であり、$\deg(L) \geq 1$ であるから、$H^0(L^\vee) = 0$ である。従って、射 $H^0(E\otimes L^\vee) \to H^0(\mathcal{O}_C(D)\otimes L^\vee)$ の像は 0 ではない。像から大域切断をとって次数 $\deg(D) - \deg(L) = d-1$ の有効因子 D' を定める。すると、先ほどと同様の図式

$$\begin{array}{ccccc} & & H^0(\mathcal{O}_C) & \xrightarrow{1\mapsto\xi} & H^1(\mathcal{O}_C(-D)) \\ & & {\scriptstyle D'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H^0(E\otimes\mathcal{O}_C(D'-D)) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_C(D')) & \xrightarrow{\gamma} & H^1(\mathcal{O}_C(D'-D)) \end{array}$$

において $f(\xi) = 0$ となることがわかる。Serre 双対をとることで、このことは $L_{D'} \subset H$ であることを示している。以上で (ii) の解答を完了する。

(iii) の解答. D を次数 d の因子とする。$\mathcal{O}_C(D)$ の $\mathcal{O}_C$ による拡大で定まるランク 2 の局所自由層のうち、正規化されたものが存在することを証明すれば良い。すなわち、正規化されたランク 2 の局所自由層を定めるような元 $\xi \in H^1(\mathcal{O}_C(-D))$ が存在することを示せば良い。$V \overset{\text{def}}{:=} H^1(\mathcal{O}_C(-D))$ と置く。Riemann-Roch の定理により、$\dim(V) = l(K+D) = d+g-1$ であることに注意する。

$\mathrm{Div}^{d-1} \overset{\text{def}}{:=} C^{d-1}/S_{d-1}$ を C の次数 $d-1$ の有効因子のなす多様体とする (S_{d-1} は $d-1$ 次対称群である)。Div^{d-1} の各閉点は C の次数 $d-1$ の有効因子と対応している。$p: C\times\mathrm{Div}^{d-1} \to \mathrm{Div}^{d-1}$, $q: C\times\mathrm{Div}^{d-1} \to C$ を射影とし、閉部分スキーム $U \subset C\times\mathrm{Div}^{d-1}$ を普遍的な Div^{d-1} 上の因子とする。すなわち、閉点 $[D'] \in \mathrm{Div}^{d-1}$ (D' は C の次数 $d-1$ の有効因子) における fiber で $U_{[D']} \subset C$ は有効因子 D' を与える。U に対応する直線束を L とし、因子 U を定める単射 $\mathcal{O}_{\mathrm{Div}^{d-1}} \to L$ を一つとる。すると、$C\times\mathrm{Div}^{d-1}$ 上の完全列

$$0 \longrightarrow q^*\mathcal{O}_C(-D) \longrightarrow L\otimes q^*\mathcal{O}_C(-D) \longrightarrow (L\otimes q^*\mathcal{O}_C(-D))\otimes\mathcal{O}_U \longrightarrow 0$$

を得る。p でコホモロジーをとることで、完全列

$$R^1p_*(q^*\mathcal{O}_C(-D)) \xrightarrow{f} R^1p_*(L\otimes q^*\mathcal{O}_C(-D)) \longrightarrow R^1p_*((L\otimes q^*\mathcal{O}_C(-D))\otimes\mathcal{O}_U)$$

を得るが、合成射 $U\subset C\times\mathrm{Div}^{d-1}\xrightarrow{p}\mathrm{Div}^{d-1}$ はアフィン射なので、$R^1p_*((L\otimes q^*\mathcal{O}_C(-D))\otimes\mathcal{O}_U)=0$ であり、射 $f: R^1p_*(q^*\mathcal{O}_C(-D))\to R^1p_*(L\otimes q^*\mathcal{O}_C(-D))$ は全射である。また、平坦基底変換により、自然な同型 $R^1p_*(q^*\mathcal{O}_C(-D))\cong V_{\mathrm{Div}^{d-1}}$ を得る。$\mathcal{F}:\overset{\mathrm{def}}{=}R^1p_*(L\otimes q^*\mathcal{O}_C(-D))$ と置く。以上で全射 $f: V_{\mathrm{Div}^{d-1}}\to\mathcal{F}$ を得た。さらに、各点 $[D']\in\mathrm{Div}^{d-1}$ について、Riemann-Roch の定理より $\dim H^1(C,\mathcal{O}_C(D'-D))=g$ (一定) であるから、Grauert の定理 ([Ha, 演習 III.12.9]) より $\mathcal{F}$ はランク g の局所自由層である。

$\mathcal{K}:\overset{\mathrm{def}}{=}\ker(f)$ と置けば、$\mathcal{K}$ はランク $d-1$ の局所自由層である。全射 $V^\vee_{\mathrm{Div}^{d-1}}\to\mathcal{K}^\vee$ により引き起こされる射影束の間の射を考える：

$$\mathbb{P}_{\mathrm{Div}^{d-1}}(\mathcal{K}^\vee) \xrightarrow{\subset} \mathbb{P}_{\mathrm{Div}^{d-1}}(V^\vee_{\mathrm{Div}^{d-1}}) = \mathrm{Div}^{d-1}\times\mathbb{P}_k(V^\vee) \xrightarrow{\mathrm{proj.}} \mathbb{P}_k(V^\vee).$$

$\mathbb{P}_{\mathrm{Div}^{d-1}}(\mathcal{K}^\vee)$ は $2d-3$ 次元の多様体であり、$\mathbb{P}_k(V^\vee)$ は $d+g-2$ 次元の多様体であるから、$d\leq g$ であれば上の射の列の合成で定まる射は全射ではない。従って像に含まれない閉点を与える元 $\xi\in V$ が存在し、(ii) と [ゆ, Section 1] で行われている議論より、この ξ が所望の元であることがわかる。以上で (iii) の解答を完了する。

(iv) の解答. 正規化されたランク 2 の局所自由層 E に対して $e=-\deg(\det(E))\geq -g$ であることを証明すれば良い。$-g>e$ と仮定して矛盾を導く。

単射 $\mathcal{O}_C\to E$ をとって余核を L とすれば、L は次数 $d:\overset{\mathrm{def}}{=}-e>g$ の直線束であり、E は (0 でない) 元 $\xi\in V:\overset{\mathrm{def}}{=}H^1(L^\vee)$ を定める。(iii) と同様にして Div^{d-1} 上に全射 $f: V_{\mathrm{Div}^{d-1}}\to\mathcal{F}:\overset{\mathrm{def}}{=}R^1p_*(L\otimes q^*L^\vee)$ を構成すると、$\mathcal{F}$ はランク g の局所自由層である。従って、全射 f はグラスマン多様体への射 $\varphi:\mathrm{Div}^{d-1}\to\mathbb{G}_g(V)$ を引き起こす。各点 $[D']\in\mathrm{Div}^{d-1}$ へ f を pull-back して得られる全射は $H^1(\mathcal{O}_C(-D))\to H^1(\mathcal{O}_C(D'-D))$ であり、これは Serre 双対により単射 $H^0(\mathcal{O}_C(K-D'+D))\to H^0(\mathcal{O}_C(K+D))$ と対応するが、$\mathrm{coker}(H^0(\mathcal{O}_C(K-D'+D))\to H^0(\mathcal{O}_C(K+D)))\cong H^0(\mathcal{O}_{D'})$ であることから、有効因子 D' が異なれば単射 $H^0(\mathcal{O}_C(K-D'+D))\to H^0(\mathcal{O}_C(K+D))$ が異なり、従って各 D' はそれぞれが異なる全射 $H^1(\mathcal{O}_C(-D))\to H^1(\mathcal{O}_C(D'-D))$ を引き起こしていることがわかる。このことは φ が単射であることを意味していて、従って $\dim\mathrm{Im}(\varphi)=d$ となる。

参考文献

[Ha] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New Tork, 1977. Graduate Text in Mathematics, No. 52.

[ゆ] ゆじノート, *Hartshorne Exercise II.8.2.*