Hartshorne Exercise IV.4.6 Hyperosculating Points

ゆじ

2020 年 4 月 14 日

このノートでは、[Ha, 演習 IV.4.6] に解答を与える。基礎体 k は代数閉体であるとする。

Definition 0.1.

- $X \subset \mathbb{P}^2$ を曲線とする。正則点 $p \in X$ が X の**変曲点** (inflection point) であるとは、接線 $T_p(X)$ が X と重複度 3 以上で接することを言う。
- $X \subset \mathbb{P}^n$ を滑らかで非退化 (どんな超平面にも含まれない) 曲線、$H \subset \mathbb{P}^n$ を超平面、$p \in X$ を点とする。H が X と点 p で重複度 n 以上で接するとき、H を p における**接触超平面** (osculating hyperplane at p) と言う。H がさらに点 p で重複度 $n+1$ 以上で接するとき、H を点 p における**超接触超平面** (hyperosculating hyperplane) と言い、点 p における超接触超平面が存在するとき、点 p を**超接触点** (hyperosculating point) と言う。

Exercise ([Ha, 演習 IV.4.6])**.**

(i) $X \subset \mathbb{P}^2$ を種数 g 次数 d の射影曲線で r 個の node を持ち、それ以外で正則であるとする。このとき、X の変曲点は (適切に数えて) $6(g-1)+3d$ 個であることを示せ ($T_p(X)$ が X と $r+2$ 重に接するとき、変曲点 p は r 回数えるべきである)。ただし node は変曲点には数えない。

(ii) $X \subset \mathbb{P}^n$ を種数 g 次数 d の非特異射影曲線とする。このとき、次を示せ：

  (a) 任意の点 $p \in X$ に対して、点 p における接触超平面が存在する。

  (b) X の超接触点は (適切に数えて) $n(n+1)(g-1)+(n+1)d$ 個ある。

(iii) X を楕円曲線、$d \geq 3$ を自然数とする。標数 0 であるとせよ。このとき X はちょうど d^2 個の位数 d の点を持つ。

最初に(b)から(iii)が従うことを示しておく。

Proof. P_0 を原点とする。$V :\stackrel{\text{def}}{=} H^0(X, \mathcal{O}_X(dP_0))$ とおけば、$d \geq 3$ なので、V は非常に豊富な次元 $d-1$ の線形系となり、閉埋め込み $X \to \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{d-1}$ を得る。また X の $\mathbb{P}(V)$ 内での超平面切断の次数は d である。

点 P が X の $\mathbb{P}(V)$ 内での超接触点であれば、点 P での接触超平面は点 P と重複度 $> d-1$ で交わるので、点 P での接触超平面による X の超平面切断は dP であり、よって $dP \sim dP_0$ となって P は位数 d となる。逆に $dP \sim dP_0$ であれば、dP は X の $\mathbb{P}(V)$ 内での超平面切断として得られて、X の次数が d であることから P は超接触点となる。

こうして X の位数 d の点は、因子 dP_0 による射影空間への閉埋め込み $X \subset \mathbb{P}(V)$ のもとでの超接触点と同じ点である。ここで X の超接触点の数は(b)より適切に数えることで $(d-1)(d-1+1)(1-1)+(d-1+1)d = d^2$ 個ある。よって X の位数 d の点はちょうど d^2 個ある。

次に、接触超平面について調べる。

Setting. $V \stackrel{\mathrm{def}}{:=} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ と置く。$\dim V = n+1$ である。$X \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ は $V_X \to L \stackrel{\mathrm{def}}{:=} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X$ により得られる埋め込みであり、X がどの超平面 $\mathbb{P}^{n-1}$ にも含まれないことは $V \to H^0(X, L)$ が単射であることを意味する。X は滑らかとも射影的とも限らないとしておく。

スキームの射 $f : T \to S$ と S 上の対象 F (S-スキームや、S 上のスキームの射や、S 上の準連接層など) に対し、F_T や $F|_T$ や f^*F で F の射 $T \to S$ による基底変換を表す。

$\Delta \subset X \times_k X$ を対角、I をそのイデアル層、$p_1, p_2 : X \times_k X \to X$ を射影とする。X 上の連接層 F に対して、

$$\mathcal{P}^n(F) \stackrel{\mathrm{def}}{:=} p_{2,*}(p_1^*F \otimes \mathcal{O}_{X\times_k X}/I^{n+1})$$

と置く。$X \times_k X$ 上の全射 $p_1^*F \to p_1^*F \otimes \mathcal{O}_{X\times_k X}/I^{n+1}$ が射 $p_{2,*}p_1^*F \to \mathcal{P}^n(F)$ を引き起こすが、平坦基底変換により $p_{2,*}p_1^*F \cong H^0(X, F)|_X$ なので射

$$H^0(X, F)|_X \to \mathcal{P}^n(F)$$

を得る。また、X 上では完全列

$$0 \longrightarrow I^n/I^{n+1} \otimes F \longrightarrow \mathcal{P}^n(F) \longrightarrow \mathcal{P}^{n-1}(F) \longrightarrow 0$$

ができる。特に X が滑らかな場合は $I^n/I^{n+1} \cong \mathrm{Sym}^n(\Omega_X)$ である。

$X^{(n)}$ を I^{n+1} で定まる $X \times_k X$ の閉部分スキームとする。点 $p \in X$ を取り、この点を与える射を同じ記号 $p : \mathrm{Spec}(k) \to X$ で表す。図式

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_{X,p}^{n+1}) & \xrightarrow{p^n} & X^{(n)} & & \\
{\scriptstyle i_p^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^n} & & \\
p_2^{-1}(p) & \xrightarrow{p_X} & X \times_k X & \xrightarrow{p_1} & X \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow \\
\mathrm{Spec}(k) & \xrightarrow{p} & X & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(k)
\end{array}$$

の各四角形はそれぞれ pull-back の図式である。X 上の連接層 F に対し、$X \times_k X$ 上の射 $p_1^*F \to i_*^n i^{n,*} p_1^*F$ を p_X で基底変換することを考える。p_X, i^n はともに閉埋め込みであるため、自然な射

$$F \cong p_X^* p_1^* F \to p_X^* i_*^n i^{n,*} p_1^* F \cong i_{p,*}^n p^{n,*} i^{n,*} p_1^* F$$

を得る。ここで $p_1 \circ i^n \circ p^n = i_p^n$, であることから、自然な射

$$F \to i_{p,*}^n i_p^{n,*} F$$

を得る。この射は X 上で F に全射 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_{X,p}^{n+1}$ をテンソルして得られる射に他ならない。従って、射 $H^0(X, F)|_X \to \mathcal{P}^n(F)$ を各点 $p \in X$ へ基底変換して得られる射

$$H^0(X, F) \to \mathcal{P}^n(F) \otimes k(p) \cong F_p/\mathfrak{m}_{X,p}^{n+1} F_p$$

は、stalk をとる射 $H^0(X, F) \to F_p$ と剰余をとる射 $F_p \to F_p/\mathfrak{m}_{X,p}^{n+1} F_p$ の合成に他ならない。

X を曲線、$X \to \mathbb{P}(V)$ を射、$L :\overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_X$ と置き、$X \to \mathbb{P}(V)$ に対応する全射 $V_X \to L$ を一つとる。$X \to \mathbb{P}(V)$ は不分岐であるとする。すなわち、$V_X \to \mathcal{P}^1(L)$ は全射である (cf. [ゆ sep])。元 $s \in V$ が $s = 0$ で定める $\mathbb{P}(V)$ の超平面が X と点 $p \in X$ で n 重に交わることは、$s \in V$ が $V \to \mathcal{P}^{n-1}(L) \otimes k(p)$ の核に含まれることと同値である。従って、点 p での接触超平面の定義方程式は、射 $V \to \mathcal{P}^{d-1}(L) \otimes k(p)$ の核の元である。ここで $d :\overset{\text{def}}{=} \dim \mathbb{P}(V)$ である。$\dim_k(\mathcal{P}^{d-1}(L) \otimes k(p)) = d$ であるから、各点 p に対して接触超平面が存在することがわかる。超接触超平面は $V \to \mathcal{P}^d(L) \otimes k(p)$ の核の元であり、超接触点のなす閉部分スキームは $\operatorname{coker}(V_X \to \mathcal{P}^d(L))$ の台である。

$d = 2$ のとき。

参考文献

[Ha] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New Tork, 1977. Graduate Text in Mathematics, No. 52.

[ゆ] ゆじノート, *Hartshorne Exercise II.8.2.*

[ゆ sep] ゆじノート, *Separating Tangent Vectors.*